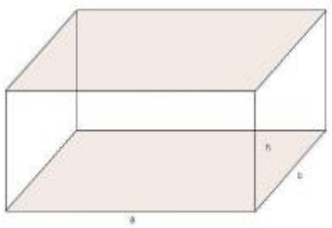
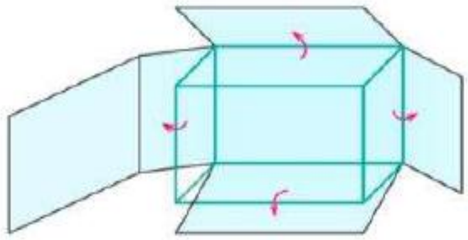
BBR/MSA – Zusammenfassung Prismen und Zylinder

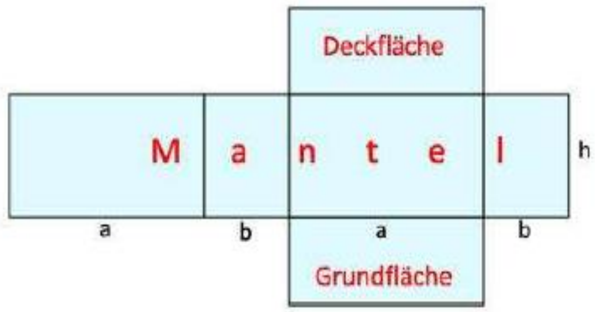
1. Definition Prismen/Zylinder

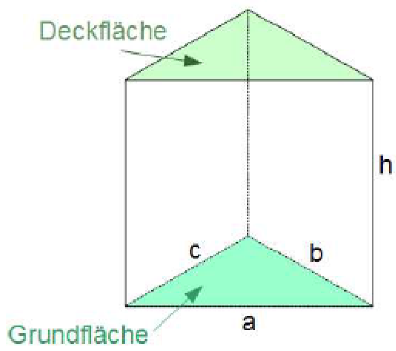
(i)
Ein Prisma ist ein Körper, der aus einer
- Grund- und Deckfläche sowie einer
- Mantelfläche besteht.

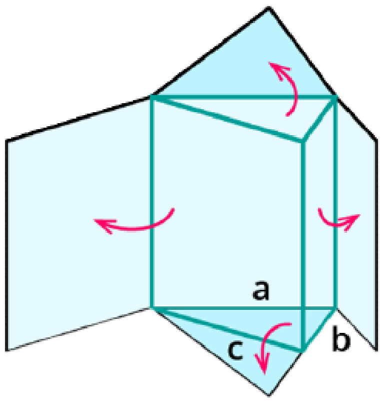
Die Grund- und Deckfläche sind immer
- deckungsgleich (identisch) und
- parallel zueinander.

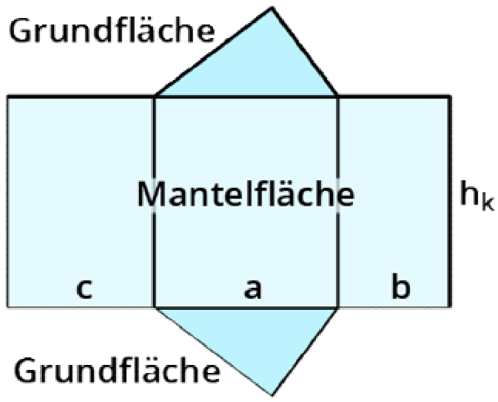




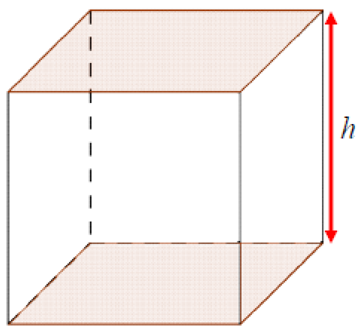


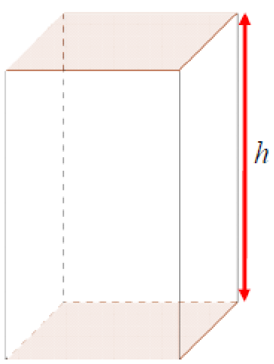


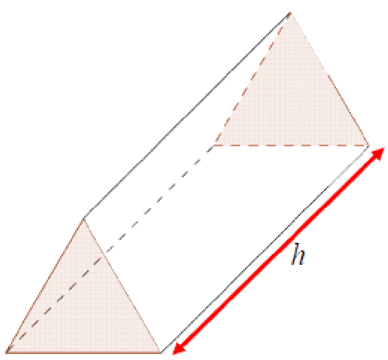




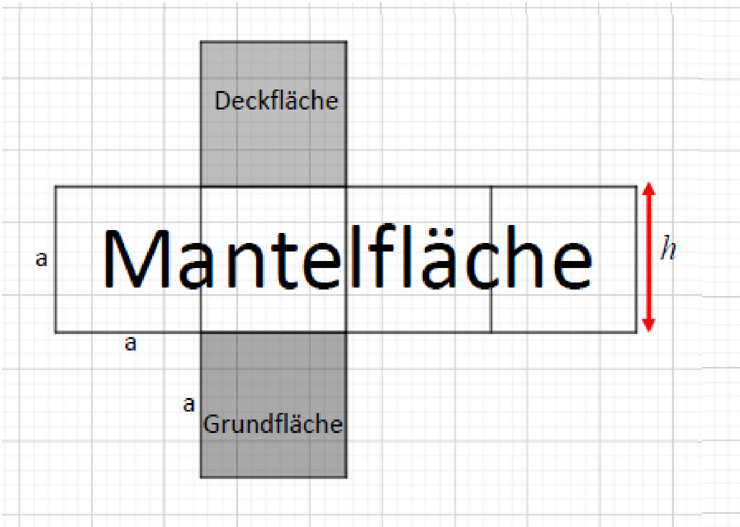
(ii)
Die Höhe *h* des Prismas ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche.





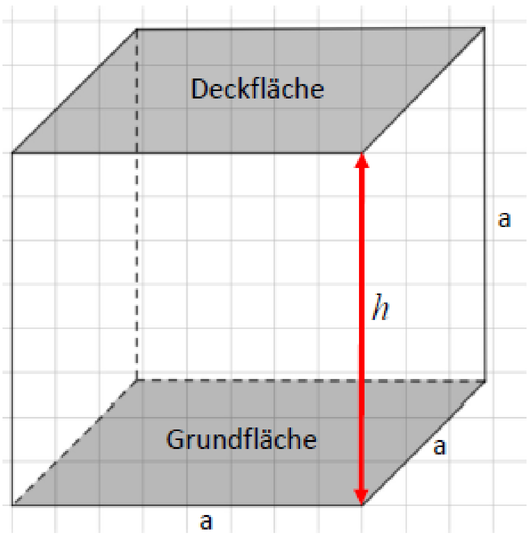


2. Netz und Schrägbild des Prismas



Beim Netz eines Prismas werden alle Kanten in der vorgegebenen Länge gezeichnet.

Das Netz eines Prismas verdeutlicht die Ausdehnung der Flächen des Prismas in der Ebene. *Dies ist zugleich die Oberfläche des Prismas.*



Für das Schrägbild eines Prismas gilt:

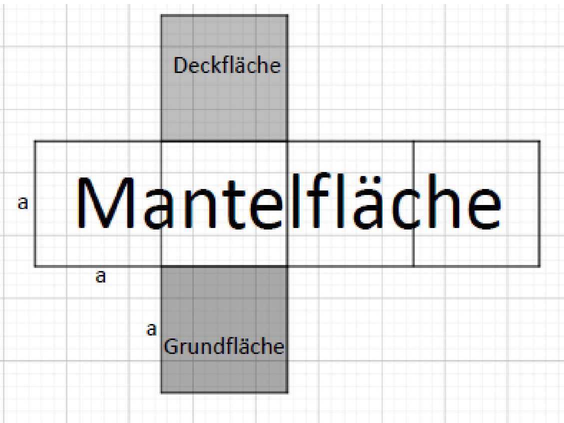
- schräge Kanten werden nur halb so lang, wie im Original gezeichnet
- schräge Kanten werden in 45° gezeichnet
- nicht sichtbare Kanten werden gestrichelt gezeichnet

Das Schrägbild eines Prismas verdeutlicht die Ausdehnung des Körpers im Raum. *Dies ist zugleich das Volumen des Prismas.*

3. Mantel und Oberflächeninhalt von Prismen

Das Formelzeichen für den Flächeninhalt ist *A*.

Die Einheit des Flächeninhalts wird immer in *hoch zwei* angegeben (z.B.: cm²; dm²; m²).



Für die Mantelfläche eines jeden Prismas gilt:

$A_M = u_G \cdot h$ $\quad$ A_M ist die Mantelfläche

u_G ist der Umfang der Grundfläche

h ist die Höhe des Prismas

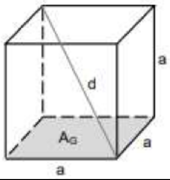
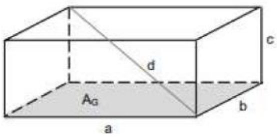
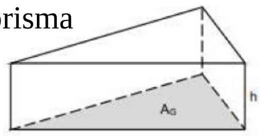
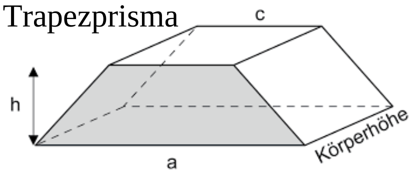
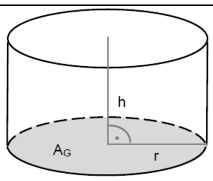
Für die Oberfläche eines jeden Prismas gilt:

$A_O = 2 \cdot A_G + A_M$ $\quad$ A_O ist die Oberfläche

A_G ist der Flächeninhalt der Grundfläche

A_M ist die Mantelfläche

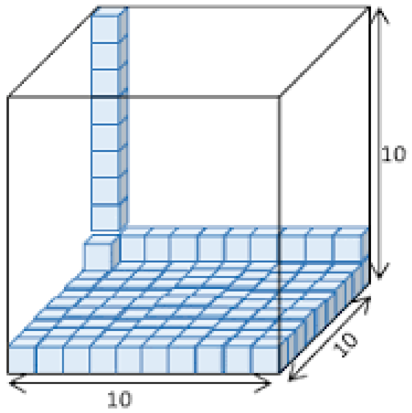
Übersicht zu einzelnen konkreten Prismen (*eine Auswahl*) **mit zugehöriger Grundfläche**

Prisma	Mantelfläche	Oberfläche
Würfel Grundfläche ist ein *Quadrat* 	$A_M = 4 \cdot a \cdot a = 4 \cdot a^2$ a *ist auch die Höhe des Körpers*	$A_O = 6 \cdot a^2$
Quader Grundfläche ist ein *Rechteck* 	$A_M = (2 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot c$ c *ist die Höhe* h *des Körpers*	$A_O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$
Dreiecksprisma Grundfläche ist ein *Dreieck* 	$A_M = (a + b + c) \cdot h$	$A_O = 2 \cdot A_G + A_M$
Trapezprisma  Grundfläche ist ein *Trapez*	$A_M = (a + b + c + d) \cdot h_k$ h_k *ist die Höhe des Körpers*	$A_O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h + A_M$ h *ist die Höhe des Trapezes*
Zylinder Grundfläche ist ein *Kreis* 	$A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$A_M = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

4. Volumen von Prismen

Das Formelzeichen für das Volumen ist *V*.

Die Einheit des Volumens wird immer in *hoch drei* angegeben (z.B.: cm³; dm³; m³).



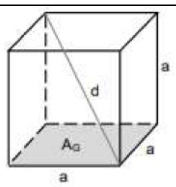
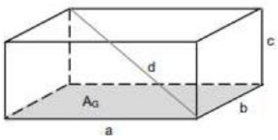
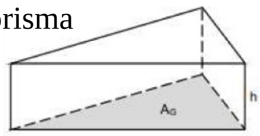
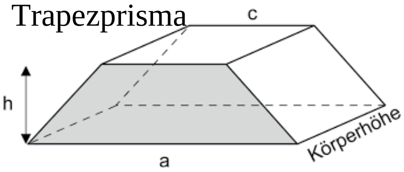
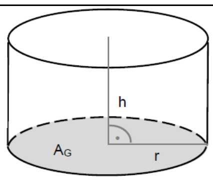
Für alle Prismen gilt:

$V = A_G \cdot h$

A_G ist der Flächeninhalt der Grundfläche

h ist die Höhe des Prismas

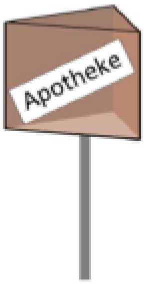
Übersicht zu einzelnen konkreten Prismen (*eine Auswahl*) **mit zugehöriger Grundfläche**

Prisma	Grundfläche	Volumen
Würfel 	Grundfläche ist ein *Quadrat* $A_G = a^2$	$V = a^2 \cdot a$ *a ist auch die Höhe des Körpers* $V = a^3$
Quader 	Grundfläche ist ein *Rechteck* $A_G = a \cdot b$	$V = a \cdot b \cdot c$ *c ist die Höhe h des Körpers*
Dreiecksprisma 	Grundfläche ist ein *Dreieck* $A_G = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ *	$V = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \cdot h$
Trapezprisma 	Grundfläche ist ein *Trapez* $A_G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ ** *h ist die Höhe des Trapezes*	$V = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \cdot h_k$ h_k *ist die Höhe des Körpers*
Zylinder Grundfläche ist ein *Kreis* 	Grundfläche ist ein *Kreis* $A_G = \pi \cdot r^2$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

* siehe Zusammenfassung Ebene Figuren (Dreieck)
** siehe Zusammenfassung Ebene Figuren (Trapez)

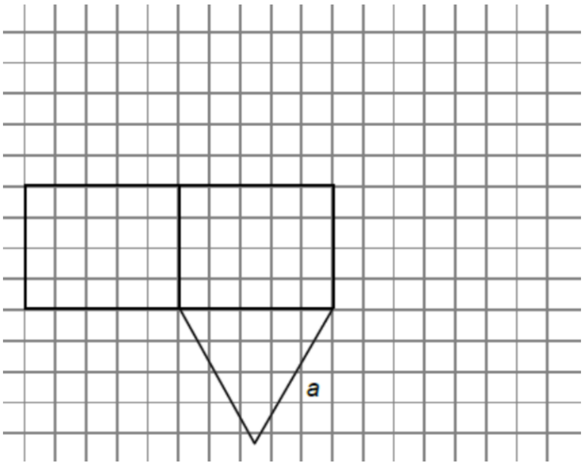
5. Berechnungen an Prismen - Beispielaufgaben

1. Aufgabe



Eine Apotheke nutzt ein Dreiecksprisma (wie abgebildet) als Werbefläche.
Jede der drei Seitenflächen ist 1,5m breit und 1,2m hoch.

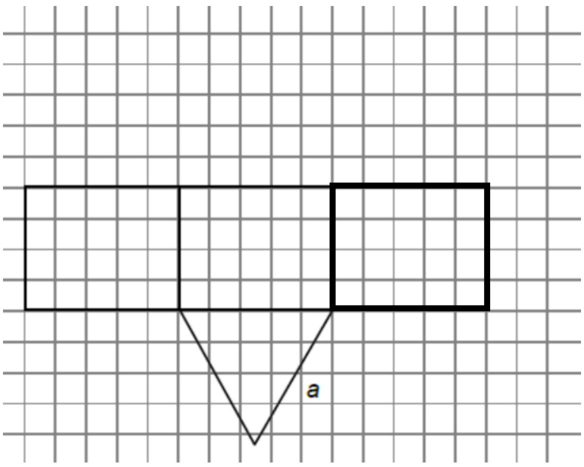
a) Vervollständigen Sie das Netz des Dreiecksprismas und geben Sie die Kantenlänge von a an.



Herangehensweise:

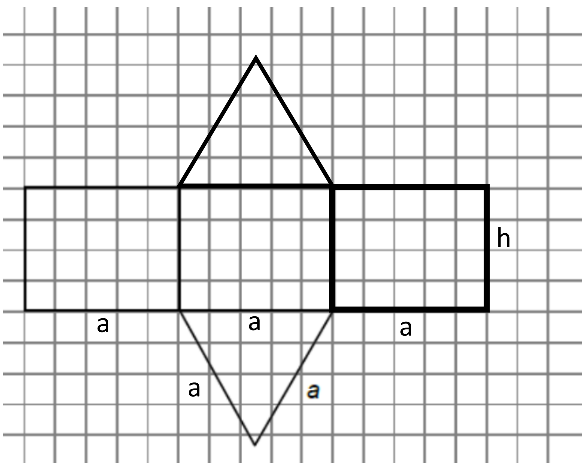
Zu dem hier abgebildeten Dreiecksprisma fehlt noch die dritte Seitenfläche (Rechteck) und die Deckfläche (Dreieck).

Die Länge und die Breite der Seitenfläche muss mit den bereits vorhandenen Seitenflächen übereinstimmen
=> 5 Kästchen breit und 4 Kästchen hoch



Herangehensweise:

Die Spitze des Dreiecks muss von der Mitte der Rechteckseite dieselbe Höhe haben, wie das bereits eingezeichnete Dreieck
=> h = 2,2cm

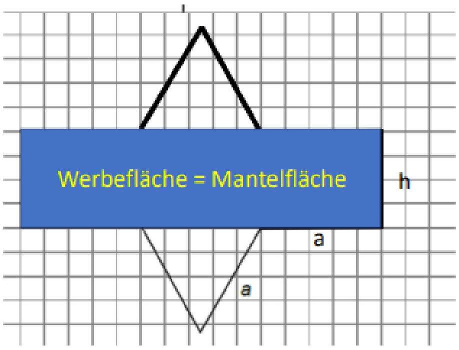


a ist eine Kante der Grundfläche. Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit einer Kantenlänge von 1,5m.
=> a = 1,5m

b) Berechnen Sie die Größe der Werbefläche, die insgesamt zur Verfügung steht.

Herangehensweise:

Mit der Werbefläche ist die Mantelfläche des Prismas gemeint.

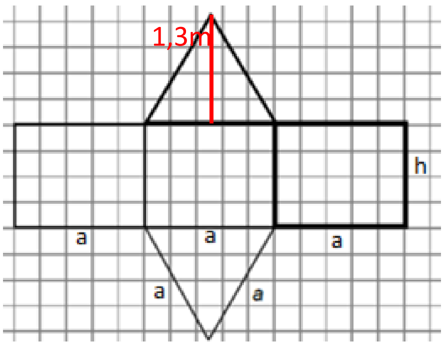


⇨ $A_M = u_G \cdot h$

$A_M = 3 \cdot a \cdot h$
$A_M = 3 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2$
$\underline{\underline{A_M = 5{,}4m^2}}$

c) Die Höhe der dreieckigen Deckfläche beträgt 1,3m. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

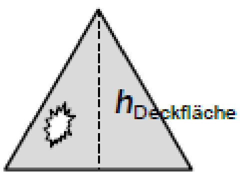
Herangehensweise:



=> $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}3$

$\underline{\underline{A = 0{,}975m^2}}$



d) Durch ein Loch in der Deckfläche ist Regenwasser in den Holkörper geflossen. Berechnen Sie, wie viel Liter Wasser in dem Körper sind.

Herangehensweise:

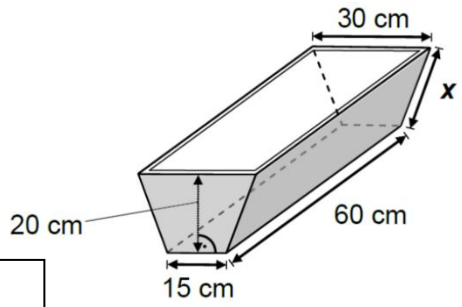
Mit dem Wasser in dem Körper ist das Volumen des Prismas gemeint. Für Wasser gilt: $1l = 1dm^3$
=> Die Kantenlängen des Prismas müssen in *dm* umgerechnet werden.
=> Anschließend muss das Volumen des Prismas berechnet werden.

$a = 1{,}5m = 15dm$ $\quad h = 1{,}2m = 12dm$ $\quad h_{Deckfläche} = 1{,}3m = 13dm$

$V = A_G \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 13 \cdot 12$
$V = 1170l$

2. Aufgabe

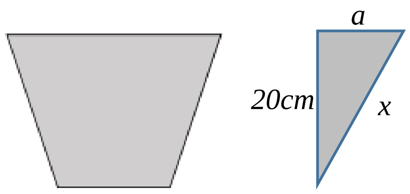
Gegeben sind folgende Blumenkästen.



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

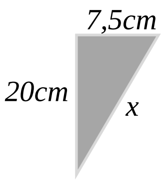
a) Weisen Sie nach, dass die Schenkel (Seite *x*) ca. 21,4cm lang sind.

<u>Herangehensweise:</u>



x soll berechnet werden. *a* ergibt sich wie folgt:

$$a = (30 - 15) \div 2 = 7{,}5cm$$



Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$$x^2 = 20^2 + 7{,}5^2$$
$$x^2 = 456{,}25 \quad |\sqrt{}$$
$$\underline{\underline{x = 21{,}4cm}}$$

b) Berechnen Sie das Fassungsvermögen eines solchen Blumenkasten, wenn es bis zu 3cm unterhalb der Oberkante der Grundfläche mit Blumenerde gefüllt werden soll. Geben Sie das Fassungsvermögen in m³ an und runden Sie auf Tausendstel.

<u>Herangehensweise:</u>

Zuerst müssen die Kantenlängen des Prismas in *m* umgerechnet werden. Anschließend berechnen wir das Volumen des Prismas.

Es gilt: 100cm = 1m bzw. 10cm = 0,1m

$$V = A_G \cdot h$$
$$V = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{Trapez} \cdot h$$
$$V = \frac{1}{2} \cdot (0{,}15 + 0{,}30) \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}6$$
$$\underline{\underline{V = 0{,}023m^3}}$$

c) Wie viel dieser Blumenkästen müssen gekauft werden, wenn 0,2m³ Blumenerde zur Verfügung stehen?

$$0{,}2 \div 0{,}023 \approx 8{,}7$$

⇨ Es müssten 9 Blumenkästen gekauft werden.